Н.А.РУТТА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

И

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

(2-й семестр)

Ростов - на - Дону

2018

1. Базисные финансовые расчеты

Простые и сложные проценты.

Под ***процентными деньгами*** или ***процентами*** в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от представления денег в долг в любой форме.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере ***процентной ставки*** – отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются ***простыми***, а во втором – ***сложными процентными ставками***.

Обычно расчеты с помощью простых процентов используются на практике за краткосрочные кредиты с периодом T меньше 1 года.

Пусть:

$S(0)$ – начальный вклад;

i – процентная ставка;

$S(0)i$ – начисленные проценты за один период;

$S(0)ni$ – начисленные проценты за n периодов;

S – наращенная сумма

Тогда наращенную сумму можно представить в виде суммы двух слагаемых: начальный вклад P и суммы процентов I,

$$S = S(0) + I,$$

где:

$$I = S(0)ni$$

Таким образом, формула наращения по простым процентам:

$$\boldsymbol{S=S(0)(1+ni)}$$

При этом надо учитывать принятые условности, иногда неявно оговариваемые в сделке. Ставка процентов устанавливается в расчете за год, поэтому при краткосрочном кредите необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору.

Для этого величину n выражают в виде дроби:

$$n=t/k,$$

где:

n- срок ссуды (измеренный в долях годах);

k- число дней в году;

t- срок операций ссуды в днях.

Часть за базу измерений берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней). В этом случае говорят, что вычисляют ***обыкновенный %*** (коммерческий). В отличие от него, ***точный %*** получают, когда за базу берут действительное число дней в году (365 или 366).

Расчет числа дней пользования ссудой также может быть:

- точным (количество дней между 2-мя датами);
- приближенным (число месяцев и дней ссуды, при этом продолжительность всех месяцев составляет около 30 дней).

Варианты расчетов процентов, применяемых на практике:

1. Точные % с точным числом дней ссуды (схема 365/365, британская практика);
2. Обыкновенные % с точным числом дней ссуды (схема 365/360 французская практика);
3. Обыкновенные % с приблизительным числом дней ссуды (схема 360/360 германская практика)

Пример.

Ссуда 25000 руб. выдана на срок 0,7 года под простые проценты 18% годовых. Определить проценты и наращенную сумму.

Решение:

Проценты находим по формуле $I = S(0)ni$:

$I = 25000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}18 = 3150$.

Наращенную сумму по формуле $S=S(0)(1+ni)=25000(1+0{,}7\cdot 0{,}18)=28150$ руб.

Формула наращения по сложным процентам:

$$S = S(0)(1+j)^n ,$$

где:

S – наращенная сумма;

j – годовая ставка сложных процентов;

n – срок ссуды;

Номинальная и эффективная ставки процентов. Дисконтирование.

Пусть годовая ставка сложных процентов равна j, а число периодов начисления в году m. При каждом начислении проценты капитализируются, т. е. добавляются к сумме, начисленным в предыдущем периоде процентам. Каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставка j называется ***номинальной***. Начисление процентов по номинальной ставке проводится по формуле:

$$S(T) = S(0)\,(1+j/m)^{mn},$$

где:

Эффективная ставка % показывает, какая годовая ставка сложных % дает тот же финансовый результат, что и m – разовое наращение в год по ставке j/m.

Если % капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m , то по определению можно записать следующее равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+i_{эф})^{n} = (1+j/m)^{mn},$$

где:

$i_{эф}$ – эффективная ставка;

j/m – номинальная ставка

связь между $i_{эф}$ и j:

$$i_{эф} = (1+j/m)^{m} - 1$$

обратная связь:

$$j = m\,[(1+ i_{эф})^{1/m} - 1].$$

Обычно при удержании процентов в момент выдачи ссуды, при учете векселей, при покупке депозитных сертификатов возникает задача определения по заданной сумме $S(T)$, которую следует уплатить через время T, сумму получаемой ссуды $S(0)$ при заданной годовой процентной ставке d. В этой ситуации начальную сумму $S(0)$ принято называть ***современной величиной*** (приведенной стоимостью), ставку d - дисконтной или ***учетной процентной ставкой***, величину $D = S(T)-S(0)$- ***дисконтом***, а процедуру определения современной величины - ***дисконтированием.***

Кредитные операции с конверсией валюты

В операциях с конверсией валют имеются 2 источника дохода: изменение курса и наращение процентов.

Первый вариант. Валюта – Рубли – Рубли – Валюта.

Исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется в исходную валюту.

Этот вариант предполагает 3 шага:

- обмен валюты на рубли
- наращение процентов на эту сумму
- конвертирование в исходную валюту

Обозначим:

$P_в$ – сумма депозита в валюте;

P_p – сумма депозита в рублях;

$S_в$ – наращенная сумма в валюте;

S_p – наращенная сумма в рублях;

K_0 – курс обмена в начале операции;

K_1 – курс обмена в конце операции;

n - срок депозита;

i – ставка наращения в рублях;

j – ставка наращения в валюте.

Наращенная (конечная) сумма в валюте определяется след.образом:

$$S_в = P_в K_0 (1+ni) \frac{1}{K_1}$$

Общий множитель наращения с учетом двойного конвертирования здесь имеет вид:

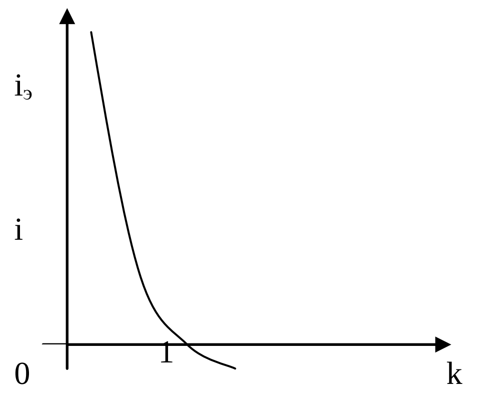
$$m = \frac{K_0}{K_1}(1+ni)$$

В качестве измерения доходности за срок операции примем простую годовую ставку процента $i_э$:

$$i_э = \frac{S_в - P_в}{P_в n} = \frac{\left[\frac{K_0}{K_1}(1+ni) - 1\right]}{n} = \frac{1}{k}\frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n},$$

где: $k = \frac{K_1}{K_0}$ - темп роста обменного курса за срок операции.

С увеличением k эффективность операции падает:



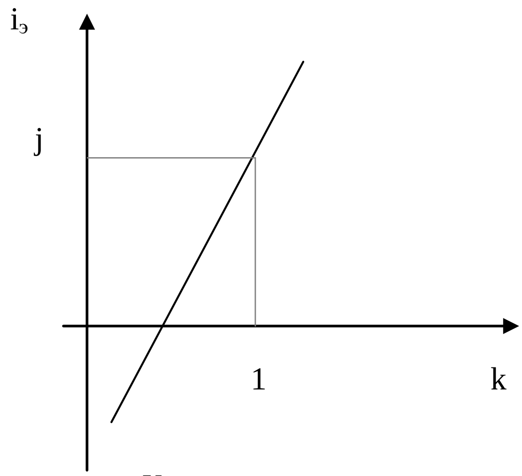
при $k = 1$ $i_э = i$
при $k > 1$ $i_э < i$
при $k < 1$ $i_э > i$

<u>*Второй вариант*</u>: Рубли – Валюта – Валюта – Рубли

В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя следующего выражения для наращенной суммы:

$$S_p = P_p\left(1+nj\right)\frac{K_1}{K_0}$$

Доходность операции в целом определяется по формуле:



при $k = 1$ $i_э = j$
при $k > 1$ $i_э > j$
при $k < 1$ $i_э < j$

$$i_э = \frac{S_p - P_p}{P_p n} = \frac{\frac{K_1}{K_0}\left(1+nj\right)-1}{n} = \frac{k\left(1+nj\right)-1}{n}$$

Пример.

Свободные 2000 долларов можно положить на депозит на полгода. Текущий курс доллара равен 31 руб. за 1 долл. Через полгода этот курс планируется на уровне 32 руб. Процентные ставки: i = 17%; j = 6%. Сделать вклад в рублях или в долларах?

Решение:

1. если сделать вклад в СКВ, то

$$S_в = 200 \cdot \left(1 + 0,5 \cdot 0,06\right) = 200 \cdot 1,03 = 2060$$

2. при конверсии рублей в СКВ получим величину

$$S_в = 2000 \cdot \frac{31}{32} \cdot \left(1 + 0,5 \cdot 0,17\right) = 2000 \cdot \frac{31}{32} \cdot \left(1,085\right) = 2102,2 \text{ долл.}$$

3. проанализируем, какова будет $S_в$, если курс обмена в конце операции составит:

   а) K_1 = 33 руб./долл.

   б) K_1 = 34 руб./долл.

3.а) $S_в = 2000 \cdot \frac{31}{33} \cdot 1,085 = 2038,5$ долл.

3.б) $S_в = 2000 \cdot \frac{31}{34} \cdot 1,085 = 1978,5$ долл.

2. Потоки платежей

2.1 <u>Баланс финансовой операции при использовании сложной и простой ставок наращения</u>

Баланс финансовой операции предусматривает эквивалентность вложений и поступлений. Рассмотрим баланс финансовой операции на примере погашения задолженности. Для анализа баланса может быть использован контур финансовой операции.

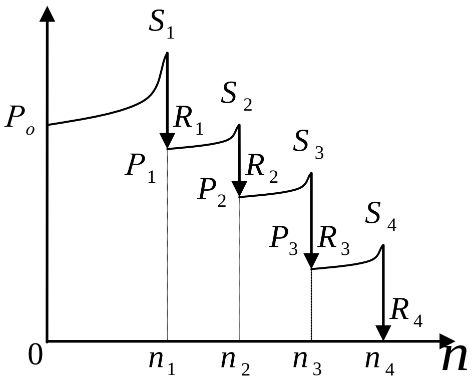


*Рис.*3.1.

На рис. 3.1 показан контур финансовой операции для сложной процентной ставки. На этом рисунке представлены следующие величины: P_0-начальная сумма долга, P_1, P_2, P_3, P_4-выплаты, S_1, S_2, S_3, S_4-наращённые по сложной процентной ставке i суммы долга, P_1, P_2, P_3,0-оставшиеся суммы долга после выплат в моменты n_1, n_2, n_3, n_4 соответственно. Не погашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период. Сбалансированная операция имеет замкнутый контур, то есть последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности.

Как следует из рис. 3.1, последняя выплата определяется соотношением:

$$R_4 = S_4 = P_3(1+i)^{n_4-n_3} = (S_3 - R_3)(1+i)^{n_4-n_3} = \left[(P_1(1+i)^{n_2-n_1} - R_3\right](1+i)^{n_4-n_3} =$$

$$\left[((P_0(1+i)^{n_1} - R_1)(1+i)^{n_2-n_1} - R_2)(1+i)^{n_3-n_2} - R_3\right] \times (1+i)^{n_4-n_3}.$$

Раскрыв скобки в полученном выражении, перепишем его в виде:

$$P_0(1+i)^{n_4} - [R_1(1+i)^{n_4-n_1} + R_2(1+i)^{n_4-n_2} + R_3(1+i)^{n_4-n_3} + R_4] = 0.$$

(3.1)

Из этой формулы следует, что наращённая к концу срока первоначальная сумма долга равна сумме частичных платежей, также наращённых к концу срока. Разделив правую и левую части выражения (3.1) на $(1+i)^{n_4}$, получим:

$$P_0 - \left[\frac{R_1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{R_2}{(1+i)^{n_2}} + \frac{R_3}{(1+i)^{n_3}} + \frac{R_4}{(1+i)^{n_4}}\right] = 0.$$

(3.2)

Из последней формулы следует, что сумма всех современных стоимостей выплат равна первоначальной величине долга.

Задача 1.

В соответствии с обязательством долг в сумме 100 тыс. руб. должен быть погашен в течение трёх лет. Проценты начисляются по сложной процентной ставке 14 % годовых. Погашение долга производится частичными платежами: в конце первого года выплачивается сумма 20 тыс. руб., в конце второго- 50 тыс. руб., остаток - в конце третьего года. Определить сумму, выплачиваемую в конце срока.

Решение:

Используя формулу (3.2), напишем исходное уравнение:

$$100000=\frac{20000}{1+0{,}14}+\frac{50000}{(1+0{,}14)^2}+\frac{R_3}{(1+0{,}14)^3}.$$

Решая это уравнение относительно R_3, получим сумму, выплачиваемую в конце срока: R_3 = 65162, 4 руб.

Рассмотрим случай простой процентной ставки. При этом расчёт может проводиться между двумя методами. Первый метод, называемый ***актурным***, используется в операциях со сроком более года. Контур финансовой операции для этого случая показан на рис. 3.2. Обычно при расчётах используются обыкновенные проценты с приближённым числом дней ссуды.

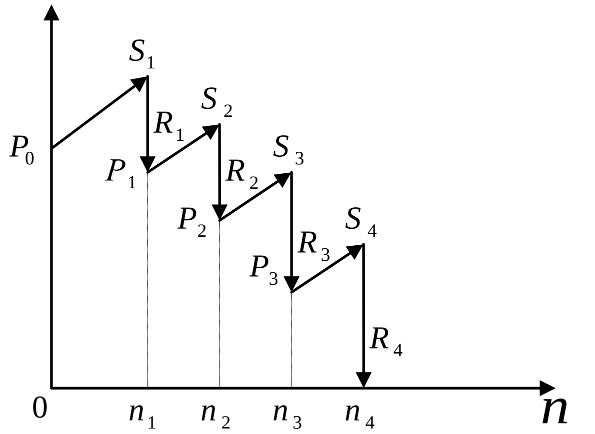


Рис. 3.2

Обозначения рис.3.2 остались те же, что и для случая сложных процентов рис. 3.1. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период. Если частичный платёж меньше начисленных процентов, то его не учитывают в момент поступления и приплюсовывают к следующему платежу. Сбалансированная операция имеет замкнутый контур, то есть последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. Для определения остатка задолженности R_4 (рис.3.2), выплачиваемого в момент n_4, могут быть использованы следующие формулы:

$$P_1 = P_0(1+n_1 i) - R_1, \tag{3.3}$$

$$P_2 = P_1(1+(n_2-n_1)i) - R_2, \tag{3.4}$$

$$P_3 = P_2(1+(n_3-n_2)i) - R_3, \tag{3.5}$$

$$0 = P_3(1+(n_4-n_3)i) - R_4. \tag{3.6}$$

Второй метод расчёта остатка долга называется правилом торговца. Этот метод поясняется на рис. 3.3. Сумма долга с начисленными процентами остаётся неизменной до полного погашения и в соответствии с рис. 3.3 равной $P_0(1+n_k i)$. Параллельно идёт накопление частичных платежей, сумма которых после наращения к концу срока должна быть равна наращённой сумме долга, то есть:

$$P_0(1+n_k i)=\sum_{j=1}^{k} R_j[1+(n_k-n_j)i], \qquad (3.7)$$

где R - сумма частичного платежа под номером j, k-общее количество частичных платежей.

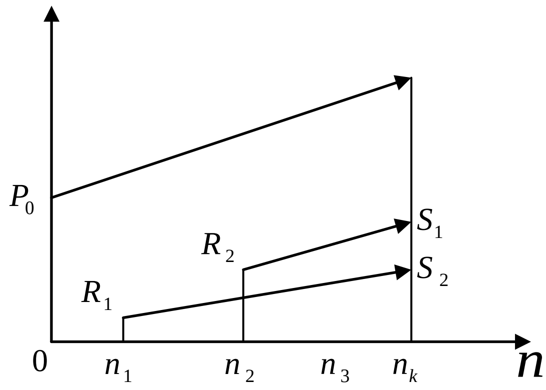


Рис.3.3

Если, например, известны все сроки частичных платежей и все выплаты, кроме последней, то эту последнюю выплату определяют по формуле (3.7).

Задача 2.

Ссуда в размере 10 тыс. руб. выдана 1 февраля до 1 августа включительно под простые проценты 18% годовых. В счёт погашения долга 16 апреля поступило 6 тыс. руб., а 16 июня-100 руб. Определить остаток долга на конец срока актурным методом и правилом торговца.

Решение:

Контур финансовой операции при расчёте остатка долга на конец срока актурным методом показан на рис. 3.4.

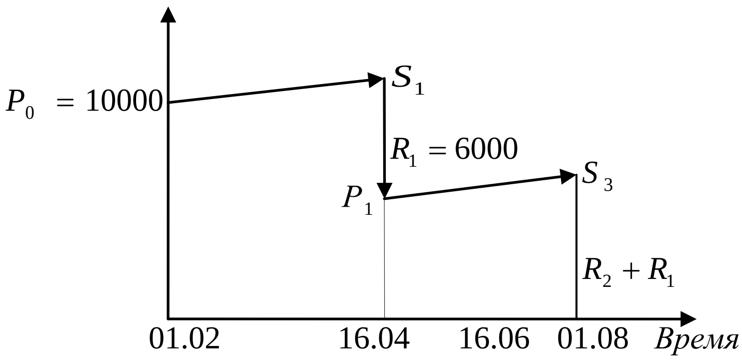


Рис. 3.4

При расчёте потребуются следующие промежутки времени:

с 01 февраля по 16 апреля-75 дней,

с 16 апреля по 16 июня-60 дней,

с 16 июня по 01 августа-45 дней.

На 16 апреля до частичной выплаты величина долга составит:

$$S_1 = 10000\left(1+\frac{75}{360}0{,}18\right)=10375.,$$

а после частичной выплаты:

$$P_1 = S_1 - R_1 = 10375 - 6000 = 4375\,руб.$$

На 16 июня до частичной выплаты величина долга составит:

$$S_2 = 4375\left(1+\frac{60}{360}0{,}18\right) = 4506{,}25\,руб.$$

Так как проценты в данном случае $I_2 = S_2 - P_1 = 4506{,}25 - 4375 = 131{,}25\,руб.$ больше взноса, равного 100 руб., то взнос не засчитывается и переносится на следующий платёж.

На 1 августа наращённая величина долга составит:

$$S_3 = 4375\left(1+\frac{105}{360}0{,}18\right) = 4604{,}69\,руб.,$$

Окончательный платёж 1 августа будет равен:

$$R_3 = S_3 - R_2 = 4604{,}69 - 100 = 4504{,}69\,руб.$$

Контур финансовой операции при расчёте остатка долга на конец срока при помощи правила торговца показан на рис. 3.5.

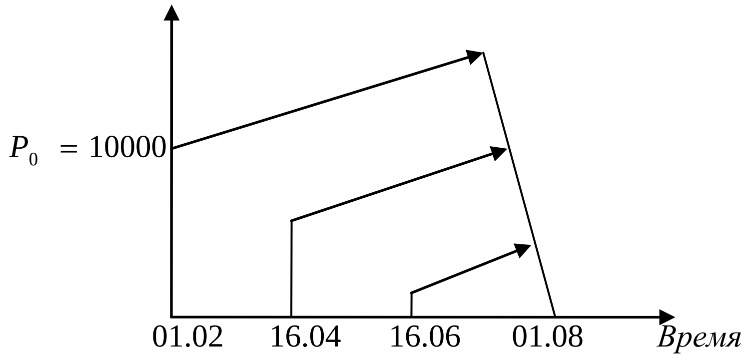


Рис. 3.5

При расчёте потребуются следующие промежутки времени:

с 01 февраля по 01 августа-180 дней,

с 16 апреля по 01 августа-105 дней,

с 16 июня по 01 августа-45 дней.

Подставим полученные данные в формулу (3.7), получим уравнение:

$$10000\left(1+\frac{180}{360}0{,}18\right) = 6000\left(1+\frac{105}{360}0{,}18\right) + 100\left(1+\frac{45}{360}0{,}18\right) + R_3.$$

Решив это уравнение относительно R_3, найдём величину последней выплаты: $R_3 = 4482{,}75\,руб.$ Таким образом, последняя выплата, рассчитанная актурным методом, превышает на 21,94 руб. последнюю выплату, рассчитанную при помощи правила торговца.

2.2. Составление плана погашения задолженности

План погашения задолженности состоит из графика периодических платежей должника. При этом может быть использован накопительный фонд для погашения долга или долг может погашаться в рассрочку.

При использовании накопительного фонда могут быть использованы постоянные взносы или взносы, изменяющиеся во времени по заданным законам. Проценты при этом могут выплачиваться в конце каждого периода (рента постнумерандо) или присоединяться к сумме основного долга.

Рассмотрим случай выплат процентов по долгу в конце каждого года постоянными суммами по сложной годовой процентной ставке a и при начислении на вносимые в фонд взносы по сложной годовой процентной ставке r. Расходы, состоящие из процентов по долгу Аa и ежегодных выплат в фонд R, называются срочными уплатами Y, где А-величина долга на начальный момент. Долг должен быть выплачен через n лет. Таким образом, срочная уплата определяется выражением:

$$Y = Aa + R = Aa + \frac{A}{s_{n;r}} = A\left(a + \frac{r}{(1+r)^n - 1}\right). \qquad (3.8)$$

Если проценты присоединяются к основному долгу и выплачиваются в конце срока, то срочная уплата вычисляется по формуле:

$$Y = A\frac{(1+a)^n}{s_{n;r}} = A\frac{(1+a)^n r}{(1+r)^n - 1}. \qquad (3.9)$$

Пример 3.3. Долг в сумме 1 млн. руб., выданный под 12% годовых, выплачивается равными частями в течение четырёх лет в конце каждого года. Для его погашения создаётся фонд, в котором на инвестируемые средства начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить размеры срочных уплат при ежегодной выплате процентов и при выплате процентов в конце срока.

Решение. При ежегодной выплате процентов срочные уплаты вычисляются по формуле (3.8):

$$Y = A\left(a + \frac{r}{(1+r)^n - 1}\right) = 1000000\left(0{,}12 + \frac{0{,}15}{1{,}15^4 - 1}\right) = 320265{,}36\,руб.$$

При выплате процентов в конце срока срочные уплаты определяются выражением (3.9):

$$Y = A\frac{(1+a)^n r}{(1+r)^n - 1} = 1000000\frac{1{,}12^4 \cdot 0{,}15}{1{,}15^4 - 1} = 315121{,}41\,руб.$$

Для займа с выплатами процентов по долгу в конце каждого года, предусматривающего льготный период, равный t годам, и имеющего общий срок n лет, формула (3.8) приобретает вид:

$$Y = Aa + \frac{A}{s_{n-t;r}}. \qquad (3.10)$$

Второе слагаемое в этой формуле принимается равным нулю во время льготного периода.

Пример 3.4. Долг в сумме 1 млн. руб. выдан под 12% годовых на четыре года. Долг выплачивается равными частями в течение последних двух лет в конце года. Для погашения долга создаётся фонд, в котором на инвестируемы средства начисляются проценты по ставке 15% годовых. Определить размеры срочных уплат при ежегодной выплате процентов.

Решение. В течение четырёх лет в конце года выплачиваются проценты, определяемые выражением:

$$I = Aa = 1000000 \cdot 0{,}12 = 120000\,руб.$$

В конце последних двух лет в накопительный фонд вносятся суммы, вычисляемые по формуле:

$$R = \frac{A}{s_{n-t;r}} = \frac{1000000 \cdot 0{,}15}{1{,}15^2 - 1} 465116{,}26\,руб.$$

При погашении долга в рассрочку (амортизация долга) также могут быть использованы постоянные взносы или взносы, изменяющиеся во времени. Рассмотрим два варианта: погашение основного долга равными срочными уплатами. Проценты на сумму долга начисляются в конце каждого года по сложной годовой процентной ставке a.

При погашении основного долга равными суммами в конце каждого года в течение n лет величина долга каждый год будет убывать на A_0 / n, где A_0 - величина первоначального долга. После очередной выплаты величина долга A_j в конце года под номером j будет равна:

$$A_j = A_0(1 - j/n). \qquad (3.11)$$

Срочная уплата, состоящая из ежегодной выплаты основного долга A_0 / n и процентов $A_{j-1}a$, в году под номером j будет равна:

$$Y_j = A_{j-1}a + \frac{A_0}{n}.$$

(3.12)

Пример 3.5. Сумму долга в 1 млн. руб. необходимо погасить в течение четырёх лет равными суммами. Выплаты основного долга производятся и проценты на долг по ставке 12% годовых начисляются в конце каждого года. Составить план погашения долга.

Решение. Ежегодные выплаты по погашению основного долга составляют $A_0 / n = 1000000 / 4 = 250000\,руб.$ Оставшаяся сумма долга в конце каждого года определяется по формуле (3.11).

$$A_1 = 1000000(1-1/4) = 750000; \quad A_2 = 500000; \quad A_3 = 250000; \quad A_4 = 0.$$

Ежегодные выплаты процентов определяются соотношением $I_j = A_{j-1}a$:

$I_1 = A_0 a = 1000000 \cdot 0{,}12 = 120000;$ $I_2 = 750000 \cdot 0{,}12 = 90000$; $I_3 = 500000 \cdot 0{,}12 = 60000;$ $I_4 = 250000 \cdot 0{,}12 = 30000.$

Срочные уплаты находим по формуле (3.12):

$$Y_1 = 120000 + 250000 = 370000; \quad Y_2 = 90000 + 250000 = 340000;$$

$$Y_3 = 60000 + 250000 = 310000; \quad Y_4 = 30000 + 250000 = 280000.$$

Полученные результаты удобно ввести в таблицу (см. таб. 3.1).

Таблица 3.1

Номер года	Остаток долга на конец года, тыс. руб.	Погашение основного долга, тыс. руб.	Проценты, тыс. руб.	Срочная уплата, тыс. руб.
1	750	250	120	370
2	500	250	90	340
3	250	250	60	310
4	0	250	30	280

При погашении долга равными срочными уплатами в конце каждого года в течение n лет ежегодные выплаты разбиваются на проценты и выплаты основного долга. Так как величина долга последовательно сокращается, то такое разбиение приводит к уменьшению процентов и увеличению выплат основного долга. В этом случае формулу для расчёта срочной уплаты можно записать в виде:

$$Y = A_{j-1}a + R_j = const, \qquad (3.13)$$

где j=1,2,…,n - номер года, □ - остаток долга в конце года под номером j-1 после выплат или в конце года под номером j до выплат, R_j - сумма выплаты основного долга в конце года под номером j.

Величину срочной уплаты в рассматриваемом случае можно определить как годовую выплату ренты с процентной ставкой a, сроком n и современной стоимостью, равной величине долга A_0, то есть:

$$Y = \frac{A_0}{a_{n;a}} = \frac{A_0 a}{1-(1+a)^{-n}}. \qquad (3.14)$$

Остаток основного долга в конце года под номером j после выплат вычисляется по формуле:

$$A_j = A_{j-1} - R_j. \qquad (3.15)$$

Как следует из соотношений (3.13) и (3.15), сумма, идущая на погашение основного долга в конце года под номером j, может быть рассчитана по формуле:

$$R_j = Y - A_{j-1}a = Y - (A_{j-2} - R_{j-1})a = Y - A_{j-2}a + R_{j-1}a. \quad (3.16)$$

Соотношение (3.13) можно записать в виде:

$$Y - A_{j-2}a = R_{j-1}.$$

Подставим это в формулу (3.16), получим выражение для расчёта выплаты основного долга в конце года под номером j:

$$R_j = R_{j-1}(1+a) = R_{j-2}(1+a)^2 = ... = R_1(1+a)^{j-1}. \quad (3.17)$$

Используя это выражение, можно определить сумму выплат по основной задолженности к концу года под номером j:

$$S_j = \sum_{t=1}^{j-1} R_1(1+a)^t = R_1 \frac{(1+a)^j - 1}{a} = R_1 s_{j;a.} \quad (3.18)$$

Значение выплаты в конце первого года R_1 определяется соотношением:

$$R_1 = Y - A_0 a. \quad (3.19)$$

Пример 3.6. Сумму долга в 1 млн. руб. необходимо погасить в течение четырёх лет равными срочными уплатами. Срочные уплаты производятся в конце каждого года. Проценты на долг начисляются по ставке 12% годовых. Составить план погашения долга.

Решение. Ежегодные срочные уплаты по погашению долга вычисляются по формуле (3.14):

$$Y = \frac{A_0 a}{1-(1+a)^{-n}} = \frac{1000000 \cdot 0{,}12}{1-1{,}12^{-4}} = 329234{,}44 \, руб.$$

Значение выплаты в конце первого года определяется соотношением (3.19):

$$R_1 = Y - A_0 a = 329234{,}44 - 1000000 \cdot 0{,}12 = 209{,}234 \, руб.$$

Проценты в конце первого года равны:

$$I_1 = A_0 a = 1000000 \cdot 0{,}12 = 120000 \, руб.$$

Выплаты основного долга в конце каждого года определяются по формуле (3.17):

$$R_2 = R_1(1+a) = 209234{,}44 \cdot 1{,}12 = 234342{,}57,$$

$$R_3 = R_1(1+a)^2 = 209{,}234{,}44 \cdot 1{,}12^2 = 262463{,}67,$$

$$R_4 = R_1(1+a)^3 = 209234{,}44 \cdot 1{,}12^3 = 293959{,}32.$$

Ежегодные выплаты процентов определяются соотношением:

$$I_j = A_{j-1}a = Y - R_j.$$

Проведя расчёты по этой формуле, получим ежегодные выплаты процентов для второго, третьего и четвёртого годов:

$$I_2 = 329234{,}44 - 234342{,}57 = 94891{,}87,$$

$$I_3 = 329234{,}44 - 262463{,}67 = 66770{,}77,$$

$$I_4 = 329234{,}44 - 293959{,}32 = 35275{,}12.$$

Остаток основного долга в конце каждого года после выплат вычисляется по формуле (3.15).

Полученные результаты сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

Номер года	Срочная уплата, руб.	Погашение долга, руб.	Проценты, руб.	Остаток долга на конец года, руб.
1	329 234,44	209 234,44	12 000	790 765,56

2	329 234,44	234 342,57	94 891,87	556 422,99
3	329 234,44	262 463,67	66 770,77	293 959,32
4	329 234,44	293 959,32	35 275,12	0

3. Транспортная задача

Математическая модель транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известны c_{ij} $(i=1,2,..,m; j=1,2,\ldots,n)$ – стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи записываются в таблице вида:

a_i \ b_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} $(i=1,2,..,m; j=1,2,\ldots,n)$ – объемы перевозок от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Математическая модель транспортной задачи в общем случае имеет вид:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1,2,..,m \qquad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2,..,m;\ j=1,2,\ldots,n \qquad (2.4)$$

Целевая функция (2.4.1) выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов. Первая группа из m уравнений (2.2) описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью. Вторая группа из n уравнений (2.3) выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей. Неравенства (2.4) являются условиями неотрицательности всех переменных задач.

Таким образом, математическая формулировка транспортной задачи состоит в следующем: найти переменные задачи $X=(x_{ij})$ $i=1,2,..,m;$ $j=1,2,\ldots,n$, удовлетворяющие системе ограничений (2.2) и (2.3), условиям неотрицательности (2.4) и обеспечивающие минимум целевой функции (2.1).

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2.5)$$

Такая задача называется ***задачей с правильным балансом***, а ее модель - ***закрытой***. Если же это равенство не выполняется, то задача называется ***задачей с неправильным балансом***, а ее модель **–** ***открытой***.

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей, т.е. задача должна быть с правильным балансом.

Пример.

Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

b_j / a_i	50	70	80
90	9	5	3
110	4	6	8

<u>Решение:</u>

Введем переменные задачи (матрицу перевозок):

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция задачи равна сумме произведений всех соответствующих элементов матрицы X и C:

$Z(X)=9x_{11}+5x_{12}+3x_{13}+4x_{21}+6x_{22}+8x_{23}$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X – запасам второго поставщика:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}=90,$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}=110.$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$x_{11}+x_{21}=50,$

$x_{12}+x_{22}=70,$

$x_{13}+x_{23}=80.$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяют полностью.

Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными:

$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2,..,m;\ j=1,2,\ldots,n$.

Таким образом, математическая модель задачи формулируется следующим образом:

найти переменные задачи, обеспечивающие минимум функции:

$Z(X)=9x_{11}+5x_{12}+3x_{13}+4x_{21}+6x_{22}+8x_{23}$

и удовлетворяющие системе ограничений:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=90, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=110, \\ x_{11}+x_{21}=50, \\ x_{12}+x_{22}=70, \\ x_{13}+x_{23}=80 \end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2,..,m;\ j=1,2,\ldots,n$.

4. Принятие решений в условиях неопределенности.

Руководитель, менеджер, обязан разрешать проблемы, встающие перед ним, перед коллективом, которым он руководит. Он обязан принимать решения. В теории принятия решений есть специальный термин: ЛПР – лицо, принимающее решения.

Принять решение – это решить некоторую экстремальную задачу, т.е. найти экстремум некоторой функции, которую называют целевой, при некоторых ограничениях.

Методы теории вероятности и математической статистики помогают принимать решения в условиях неопределенности.

Предположим, что ЛПР рассматривает несколько возможных решений $i=1,\ldots,m$. Ситуация неопределенна, понятно лишь, что наличествует какой-то из вариантов $j=1,\ldots,n$. Если будет принято i-е решение, а ситуация есть j-я, то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход q_{ij}. Матрица $Q=(q_{ij})$ называется ***матрицей последствий*** (возможных решений). Какое же решение нужно принять ЛПР? В этой ситуации полной неопределенности могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Иначе говоря, если ситуация есть j-я, то было бы принято решение, дающее доход $q_i = \max_i q_{ij}$. Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, значит, принятие i-го решения несет риск недобрать $r_{ij}=q_i-q_{ij}$. Матрица $R=(r_{ij})$ называется ***матрицей рисков***.

Пример.

Пусть матрица последствий есть $Q=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Составить матрицу рисков.

Решение:

По условию задачи имеем:

$q_1 = \max_i q_{ij} = 8$,

$q_2 = 5$,

$q_3 = 8$,

$q_4 = 12$ (то есть из каждого столбца определяем максимальное значение).

Следовательно, матрица рисков есть $R=\begin{pmatrix} 8-5 & 5-2 & 8-8 & 12-4 \\ 8-2 & 5-3 & 8-4 & 12-12 \\ 8-8 & 5-5 & 8-3 & 12-10 \\ 8-1 & 5-4 & 8-2 & 12-8 \end{pmatrix}$,

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

При принятии решения некоторым ориентиром могут служить следующие правила-рекомендации.

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма).

Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход $a_i = \min_j q_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наибольшим a_{i0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $a_{i0} = \max_i a_i = \max_i(\min_j q_{ij})$. Так, в вышеуказанном примере имеем:

$a_1=2$,

$a_2=2$,

$a_3=3$,

$a_4=1$.

Теперь из чисел 2, 2, 3 и 1 находим максимальное. Это – 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска).

При применении этого правила анализируется матрица рисков $R=(r_{ij})$. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наименьшим b_{i0}. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i0} = \min_i b_i = \min_i(\max_j r_{ij})$.

Так в вышеуказанном примере имеем:

$b_1=8$,

$b_2=6$,

$b_3=5$,

$b_4=7$.

Теперь из чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное. Это – 5. Значит, данное правило рекомендует принять 3-е решение.

Вопросы к экзамену.

1. Простые и сложные проценты. Обыкновенный и точный процент.
2. Номинальная и эффективная ставки процентов. Дисконтирование.
3. Кредитные операции с конверсией валют.
4. Модель Леонтьева.
5. Математическая модель транспортной модели.
6. Понятие закрытой и открытой модели транспортной задачи.
7. Функциональные зависимости, используемые в экономике.
8. Применение производной в экономике.
9. Экономический смысл частных производных.
10. Бюджетное множество.
11. Применение интегралов в экономике.
12. Применение дифференциальных уравнений в экономике.
13. Примеры составления математических моделей экономических задач.
14. Законы распределения случайных величин, применяемых в экономике.
15. Значение теории двойственности в экономике.
16. Принятие решение в условиях неопределенности. Понятие матрицы рисков и последствий.
17. Правило Вальда и правило Сэвиджа.

!!!Допуском к экзамену является зачтенная контрольная работа.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.

Ниже приведены задания к контрольной работе.

Задания для контрольной работы №1.

1) Решить задачи.

Вариант 1. (для студентов с номерами зачеток, оканчивающихся на 1, 3, 5)

1. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 12 000 руб. через 300 дней. Первоначальная сумма долга – 10 000 руб. Определить доходность ссудной операции в виде простой годовой ставки наращения при К=360.
2. Сумма 12 000 руб. выплачивается через 2,4 года. Номинальная ставка процентов – 16% годовых. Определить современную стоимость при ежеквартальном начислении процентов.
3. Через 180 дней после подписания договора, должник уплатит 2 500 000 руб. Кредит выдан под 10% годовых (простые проценты, обыкновенные). Определить дисконт.
4. 500 000 руб. можно положить на депозит на полгода. Текущий курс евро равен 68 руб. за 1 долл. Через полгода этот курс планируется на уровне 69 руб. Процентные ставки: i = 19%; j = 5%. Сделать вклад в рублях или в евро?
5. Фирма получила кредит на сумму 500 000 руб. под 15% годовых. Кредит должен быть погашен тремя платежами: первый – 200 000 руб. с процентами через 30 дней; второй – 200 000 руб. с процентами через 20 дней; третий – 100 000 руб. с процентами через 20 дней. Впоследствии фирма договорилась с кредитором об объединении платежей в один со сроком погашения через 50 дней. Определить размер консолидированного платежа

Вариант 2. (для студентов с номерами зачеток, оканчивающихся на 2, 4, 7)

1. Простая процентная ставка депозита равна 20% годовых, срок депозита 0,5 года. Определить доходность финансовой операции в виде сложной годовой процентной ставки.
2. Номинальная ставка процента при начислении один раз в квартал равна 16% годовых. Определить эффективную ставку.
3. Какой величины достигнет долг, равный 8 000 руб. через 4,6 года при росте по сложной процентной наращения 20% годовых.
4. Клиент поместил на депозитный счет 1 000 000 руб. на 3,5 года при ставке простых процентов, равной 17% годовых. Определить начисленные проценты на конец срока.

5. Предприятие оформляет кредитный договор с банком на сумму 3 000 000 руб. на срок с 9 января 2018 г. До 20 марта 2018 г. при ставке простых процентов, равной 15% годовых. Рассчитать проценты за пользование кредитом при начислении обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды.

Вариант 3. (для студентов с номерами зачеток, оканчивающихся на 6, 8, 9,0)

1. Через 90 дней после подписания договора должник уплатит 1000000 руб. Кредит выдан под 20% годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?
2. Ежегодная финансовая рента, сроком на 5 лет, составляет для фирмы 50 тыс. руб. Проценты в размере 15% годовых начисляются поквартально. Определить наращенную сумму такой ренты.
3. Определить срок операции в контракте с использованием простой схемы наращения при процентной ставке 12% годовых, если его заменили сложным с периодом 2 года и 10% годовых. Финансовые последствия для участвующих сторон не меняются.
4. 80 тыс. евро можно положить на депозит на 3 года. Текущий курс евро 36, 5 руб. Предполагаемый через 3 года 38 руб. Процентные ставки: рублевая – 19%, валютная - 8%. Определить доходность операции.
5. Ссуда в размере 100 тыс.руб выдана с 1 марта по 1 октября включительно под простые проценты 15% годовых. В счет погашения долга 28 мая поступило 70 тыс.руб., а 28 июля – 10 тыс.руб. Определить остаток долга на конец срока правилом торговца.

Задания для контрольной работы №2

Студент должен выполнять те контрольные задания, номера которых соответствует последней цифре зачетки.

1) Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

1.

b_j / a_i	20	30	30	20
23	4	3	6	5
38	3	4	5	6
39	2	5	4	7

2.

b_j / a_i	20	20	30	30
20	2	4	8	2
30	4	6	10	3
50	2	5	9	7

3.

b_j / a_i	40	40	30	50
40	3	1	5	4
60	6	1	2	3
60	4	4	5	7

4.

b_j / a_i	100	100	150	150
100	2	1	3	4
150	4	3	1	7
250	5	8	9	15

5.

b_j / a_i	100	50	50	100
50	2	1	3	5
100	2	4	5	1
150	6	5	4	3

6.

b_j / a_i	40	30	30	45
25	2	3	5	1
60	7	1	2	5
60	4	3	5	6

7.

b_j / a_i	30	10	20	10
20	2	4	5	1
20	7	4	1	2
30	9	5	1	2

8.

b_j	100	200	100	120

a_i				
100	4	5	2	3
200	4	3	6	1
220	7	6	5	4

9.

b_j / a_i	50	40	35	25
35	5	6	7	9
45	5	4	6	3
70	6	4	2	1

0.

b_j / a_i	80	100	100	120
100	5	6	4	7
150	8	4	7	5
150	6	5	7	8

2) Для заданной матрицы последствий составить матрицу рисков и, применяя правила Вальда и Сэвиджа, указать рекомендации по принятию решения.

1. $$Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 10 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

3. $$Q = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 2 \\ 10 & 11 & 4 & 3 \\ 12 & 3 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $$Q = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 15 & 6 \\ 3 & 8 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

5. $$Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 5 & 5 \\ 12 & 9 & 3 & 7 \\ 4 & 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. $$Q = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 12 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \\ 8 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

7. $$Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 & 9 \\ 9 & 2 & 8 & 5 \\ 12 & 9 & 2 & 2 \\ 11 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

8. $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 8 \\ 6 & 5 & 13 & 9 \\ 7 & 7 & 11 & 11 \\ 9 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

9. $$Q=\begin{pmatrix} 5 & 11 & 3 & 15 \\ 7 & 6 & 2 & 12 \\ 9 & 4 & 8 & 1 \\ 10 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

0. $$Q=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 11 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

3) Дать ответ на следующий вопрос (ответ должен содержать как теоретическое, так и практическое описание):

1. Модель Леонтьева.

2. Функциональные зависимости, используемые в экономике.

3. Применение производной в экономике.

4. Экономический смысл частных производных.

5. Бюджетное множество.

6. Применение интегралов в экономике.

7. Применение дифференциальных уравнений в экономике.

8. Примеры составления математических моделей экономических задач.

9. Законы распределения случайных величин, применяемых в экономике.

0. Значение теории двойственности в экономике.

Правила выполнения и оформления контрольной работы:

1) Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку. Необходимо оставлять поля шириной 4-5 см для замечаний преподавателя;

2) На титульном листе тетради должны быть написаны фамилия студента, его инициалы, номер зачетки, название дисциплины, название учебного заведения, адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3) В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4) Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью выписывать ее условие.

5) Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения.