Н.А.КОТЛЯРОВА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

И

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

(1-ый семестр)

Ростов - на - Дону

2007 г.

1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

Понятие «множество» - одно из первичных (неопределяемых) понятий математики. Описательно термин «множество» объясняется как совокупность, коллекция, набор некоторых объектов произвольной природы, объединенных по каким-то общим для них признакам. Объекты, из которых состоит множество, называют его элементами (точками). Множества принято обозначать большими буквами: A, C, X,…

Символическая запись $a \in A$ означает принадлежность элемента *a* множеству *A*.

Запись $a \notin A$ означает, что элемент *a* не принадлежит множеству *A*.

Множество *A* называют ***подмножеством*** другого множества *B*, если каждый элемент множества *A* является одновременно элементом множества *B*. В этом случае пишут $A \subset B$ (читается: «*A* включается или содержится в *B*»).

Множества *A* и *B* равны (*A*=*B*) тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$, т.е. если эти множества состоят из одних и тех же элементов.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. Очевидно, $A \subset A$; *A* и $\varnothing$ называют ***несобственными подмножествами*** множества *A*. Все остальные подмножества множества *A* называют ***собственными***.

Множество *A* элементов *x*, обладающих свойством *P(x),* символически записывают в виде $A = \{x \mid P(x)\}$. Например, $A = \{x \mid x = 2k, k = 1,2,...\}$ означает, что множество *A* состоит из четных положительных чисел 2, 4, 6, 8,…

<u>Операции над множествами</u>.

Объединением (суммой) множеств *A* и *B* называют множество $A \cup B$ всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* и *B*; $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пересечением множеств *A* и *B* называют множество $A \cap B$ всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству *A* и множеству *B*; $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Замечание. Понятие объединения и пересечения могут быть обобщены на случай любого числа множеств (конечного и бесконечного). Если даны множества $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$, то символическая запись $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ означает объединение данных множеств, т.е. определяет множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из данных множеств. Символическая запись $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ означает пересечение данных множеств, т.е. определяет множество, каждый элемент которого принадлежит всем данным множествам.

Разностью множеств *A* и *B* называют множество *A**B* тех элементов множества *A,* которые не содержатся во множестве *B*; $C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Если $B \subset A$, то разность *A**B* называют ***дополнением*** множества *B* до множества *A* и обозначают $C_A B$.

Декартовым произведением множеств A и B называют множество $A \times B$ всех упорядоченных пар элементов *(a,b),* где $a \in A$, $b \in B$. Элементы a и b называют при этом ***компонентами (координатами)*** пары *(a,b).*

Декартово произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ представляет собой множество всех упорядоченных n-ок элементов *($a_1, a_2, ..., a_n$)*, где $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$.

Примеры.

1. Если A – множество четных положительных чисел, а B – множество нечетных чисел положительных чисел, то $A \cup B$ определяет множество натуральных чисел, т.е. множество $N=\{1,2,3,...,n,...\}$.
2. Если А – множество всех чисел, делящихся на 2, а B – множество всех чисел, делящихся на 5, то $A \cap B$ определяет множество всех чисел, делящихся и на 2 и на 5, т.е. делящихся на 10.
3. Если $A=\{1,2,3,4,5\}$, а $B=\{3,5\}$, то $C_A B=A \backslash B=\{1,2,4\}$, а $B \setminus A = \varnothing$.
4. Если $A=\{1,2\}$, а $B=\{3,-1,0\}$, то $A \times B = \{(1,3),(1,-1),(1,0),(2,3),(2,-1),(2,0)\}$

.

2. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА.

Натуральные числа 1,2,3,.. составляют множество N. Добавив в N число 0 и все натуральные числа со знаком минус, получают множество Z всех целых чисел. В Z определены операции сложения, вычитания, умножения. Для расчетов и измерения отрезков с любой степенью приближения используют рациональные числа $\frac{p}{q}$, где p- целое, q – натуральное. Множество всех рациональных чисел обозначают Q. В Q выполнимы все арифметические операции – сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на 0).

Числа принято изображать точками на числовой прямой по известному правилу. Однако на числовой прямой найдутся точки, для которых в Q нет соответствующего числа. Таким точкам сопоставляют иррациональные числа. Множество, состоящее из всех рациональных и всех иррациональных чисел, обозначают R и называют множеством всех действительных чисел. В R выполнимы все арифметические операции, кроме деления на число 0. Таким образом,

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Все указанные числовые множества обладают свойством упорядоченности, т.е. для любых двух различных элементов a и b любого из данных множеств можно сказать, что либо $a>b$, либо $a<b$. Кроме того, выполняется свойство транзитивности: из $a>b$ и $b>c$ следует, что $a>c$.

3. СРАВНЕНИЕ И ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Мощностью конечного множества (множества, содержащего конечное число элементов) называется количество его элементов. Мощность множества A обозначается m (A).

Пример.

Определите мощность множества A = {1, 3, 5, 7, 9} нечётных чисел.

Решение:

Простым пересчётом элементов убеждаемся, что нечётных чисел всего 5, и потому $m\,(A) = 5$.

Ясно, что понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов. Так, если $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, а $B = \{2, 4, 6, 8\}$, то $m\,(A) = 5$, а $m\,(B) = 4$ и потому $m\,(A) > m\,(B)$.

Однако если мы имеем дело с бесконечными множествами, то пересчитать элементы множества уже не удастся. Но иногда можно, как говорят, установить ***взаимно однозначное соответствие*** между двумя бесконечными множествами.

Говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, если из элементов этих множеств можно составить пары (a, b), причем каждый элемент из A и каждый элемент из B входят в одну и только одну пару.

Множества, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, содержат одинаковое количество элементов.

Множества A и B называют ***равномощными***, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие (ещё говорят: можно установить взаимно однозначное ***отображение*** множеств).

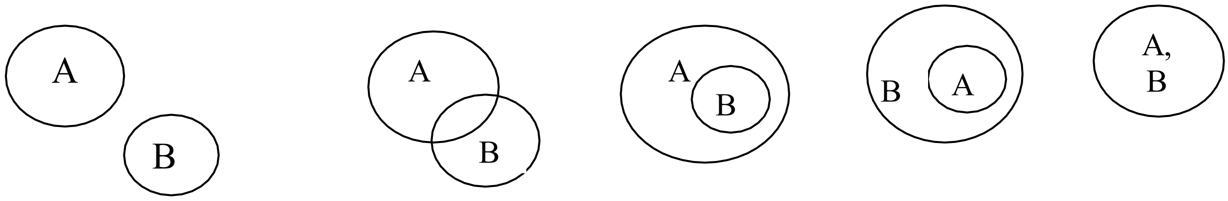
4. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ.

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, английский математик Джон Венн (1834 - 1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Леонард Эйлер (1707 - 1783) для этих целей использовал круги, при этом точки внутри круга считались элементами множества. Такие изображения сейчас называют диаграммами Эйлера - Венна.

Пусть даны два произвольных множества A и B, тогда возможны пять случаев отношений между ними:

1. Множества A и B не имеют общих элементов (рис. 1а).
2. Множества A и B имеют общие элементы, но не все элементы множества A принадлежат множеству B , и не все элементы множества B принадлежат множеству A. (рис. 1б).
3. Все элементы множества B принадлежат множеству A, но не все элементы множества A принадлежат множеству B. В этом случае говорят о *включении* множества B во множество A (рис. 1в).
4. Все элементы множества A принадлежат множеству B, но не все элементы множества B принадлежат множеству A. (рис. 1г).
5. Все элементы множества A принадлежат множеству B и все элементы множества B принадлежат множеству A. (рис. 1д).

Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется ***универсальным***



а) б) в) г) д)

Рис 1

5. ПРЯМАЯ. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ.

Любое уравнение первой степени относительно *x* и *y*, т.е. уравнение вида *Ax+By+C=0*, где *A,B,C* – постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.

Это уравнение определяет на плоскости некоторую прямую и называется ***общим уравнением прямой***.

Частные случаи:

1) *C=0*, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Прямая *Ax+By=0*, проходит через начало координат;
2) *A=0*, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Прямая *By+C=0* параллельна оси Ox;
3) *B=0*, $A \neq 0$, $C \neq 0$. Прямая *Ax+C=0* параллельна оси Oy;
4) *B=C=0*, $A \neq 0$. Прямая *Ax=0* совпадает с осью Oy;
5) *A=C=0*, $B \neq 0$. Прямая *By=0* совпадает с осью Ox.

6. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ.

Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно *y*, получим уравнение вида $y = kx + в$,

где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Его называют ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***, т.к. $k = tg\alpha$, где α - угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox.

Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то разделив все его члены на –C, получим уравнение вида: $\frac{x}{a} + \frac{y}{в} = 1$,

где $a = -\frac{C}{A}$, $в = -\frac{C}{B}$.

Его называют ***уравнением прямой в отрезках***.

<u>Пример.</u>

Дано общее уравнение прямой *12x-5y-65=0*.

Написать:

1) уравнение с угловым коэффициентом;
2) уравнение в отрезках.

Решение:

1) разрешив общее уравнение прямой относительно y получаем:

$$\frac{12}{5}x - \frac{5}{5}y - \frac{65}{5} = 0 \text{ или } y = \frac{12}{5}x - 13,$$

где $k = \frac{12}{5}$, *b=-13*,

2) разделим обе части общего уравнения на 65:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y - \frac{65}{65} = 0 \text{ или } \frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1,$$

перепишем это уравнение в виде уравнения в отрезках:

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-65/5)} = 1, \text{ где } a = \frac{65}{12},\ b = -\frac{65}{5} = -13.$$

7. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА (ОКРУЖНОСТЬ, ГИПЕРБОЛА).

1) <u>Окружность.</u>

Окружность – это множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

Если r – радиус окружности, а т. $C(a;b)$ - ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

в частности,

а) если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (1) примет вид: $x^2+y^2=r^2$,

б) если в левой части уравнения (1) раскрыть скобки, то получим:

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \qquad (2)$$

где,

l=-2a, m=-2b, $n=a^2+b^2-r^2$.

1) если $l^2+m^2-4n>0$, то уравнение (2) определяет окружность;

2) если $l^2+m^2-4n=0$, то указанное уравнение определяет точку с координатами $(-l/2;-m/2)$;

3) если $l^2+m^2-4n<0$, то оно не имеет геометрического смысла, т.е. говорят, что уравнение определяет мнимую окружность.

Взаимное расположение т.$M(x_1;y_1)$ и окружности $x^2+y^2=r^2$ определяется следующими условиями:

1) если $x_1^2+y_1^2=r^2$, то т.М лежит на окружности;

2) если $x_1^2+y_1^2>r^2$, то т.М лежит вне окружности;

3) если $x_1^2+y_1^2<r^2$, то т.М лежит внутри окружности.

2) ГИПЕРБОЛА.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, *называемых фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через *2a*), причем эта константа меньше расстояния между фокусами.

Если поместить фокусы гиперболы (рис. 2) в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получится каноническое уравнение гиперболы:

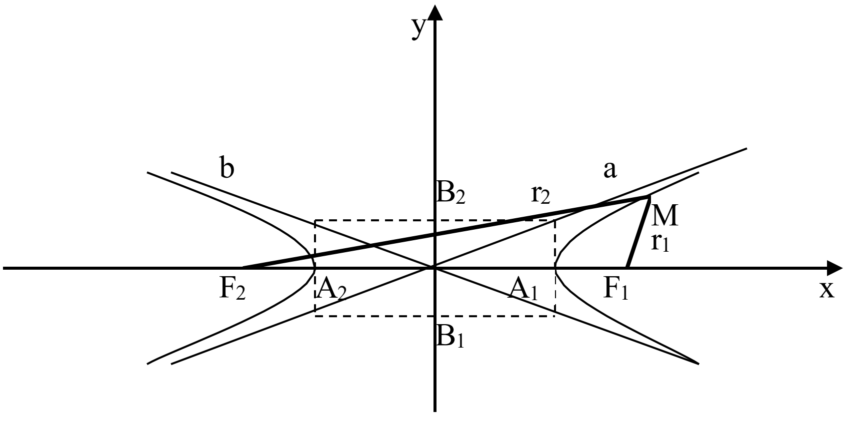
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$.

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются *вершинами гиперболы.*

Отрезок A_1A_2 такой, что $|A_1A_2|=2a$ - называется *действительной осью гиперболы.*

Отрезок B_1B_2, такой, что $|B_1B_2|=2b$ - *мнимой осью*.



Прямая называется *асимптотой гиперболы*, если расстояния т.M(x;y) гиперболы от этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm(b/a)x$

Отношение $e=c/a>1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Фокальные радиус-векторы правой ветви:

$r_1=ex-a$ – правый радиус-вектор,

$r_2=ex+a$ – левый радиус-вектор.

Фокальные радиус-векторы левой ветви:

$r_1=-ex+a$ – правый радиус-вектор,

$r_2=-ex-a$ – левый радиус-вектор.

Если a=b, то уравнение гиперболы имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$.

Такая гипербола называется *равнобочной*. Ее асимптоты образуют прямой угол.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок Oy длины 2b.

8. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА (ЭЛЛИПС, ПАРАБОЛА).

1) ЭЛЛИПС.

Эллипсом – называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают через *2a*), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

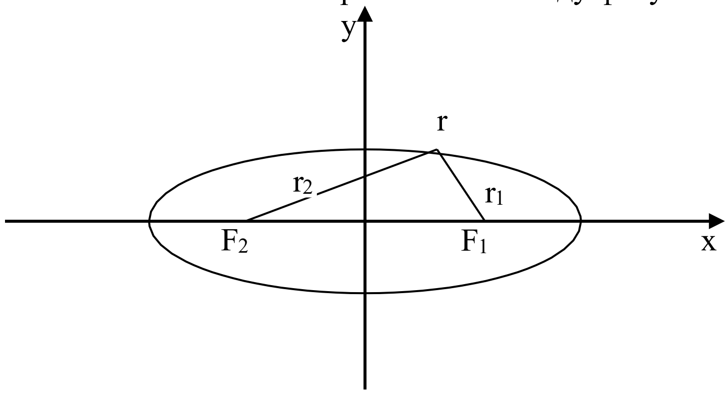


рис1

Если оси координат, расположенных по отношению к эллипсу так как на рисунке 1,

А фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в т.F_1(c;0) и F_2(-c;0), то получается простейшее (каноническое) уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3)$$

где *a* – большая полуось эллипса;

b – малая;

a, b, c связаны соотношением: $a^2 = b^2 + c^2$

c – половина расстояния между фокусами.

Форма эллипса характеризуется его эксцентриситетом:

e=c/a (т.к. c<a, то e<1)

Расстояния некоторой точки эллипса M от его фокусов называются фокальными радиусами-векторами этой точки. Их обозначают через r_1 и r_2 $(r_1+r_2=2a)$

В частном случае, когда $a=b$ ($c=0$, $e=0$, фокусы сливаются в одной точке - центре), эллипс превращается в окружность с уравнением $x^2+y^2=a^2$

Взаимное расположение т.M(x_1;y_1) и эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяется условиями:

1) если $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, то т.М лежит на эллипсе;

2) если $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$, то вне эллипса;

3) если $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, то внутри..

Фокальные радиус-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам:
$r_1=a-ex$ (правый фокальный радиус-вектор)
$r_2=a+ex$ (левый фокальный радиус-вектор)

2) ПАРАБОЛА.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

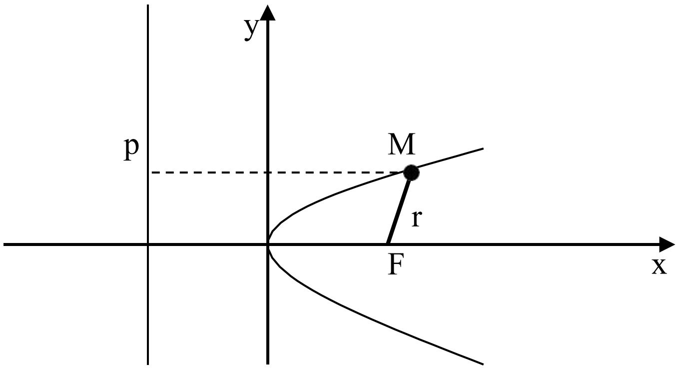


Рис. 3

Если директрисой параболы (рис. 3) является прямая $x=-p/2$, а фокусом – точка $F(p/2;0)$, то уравнение параболы имеет вид:

$$y^2=2px \tag{1}$$

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс.

Уравнение:

$$x^2=2py \tag{2}$$

является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат.

При p>0 параболы (1) и (2) обращены в положительную сторону, а при p<0 – в отрицательную.

Длина фокального радиус-вектора параболы $y^2=2px$ определяется по формуле:

$$r=x+\frac{p}{2}\ (p>0).$$

9. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Свободный вектор а (т.е. такой вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства), заданный в координатном пространстве Oxyz, может быть представлен в виде:

$a = a_x i+a_y j+a_z k$,

где: a_x, a_y, a_z – проекции вектора ***a*** на соответствующие оси координат (их называют координатами вектора *a*);

i, j, k – орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Такое представление вектора ***a*** называется его разложением по осям координат или разложением по ортам.

Векторы $a_x i$, $a_y j$, и $a_z k$, в виде суммы которых представлен вектор ***a***, называются ***составляющими (компонентами) вектора а по осям координат***.

Длина (модуль) вектора ***a*** определяется по формуле:

$$a = |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Направление вектора а определяется углами α, β, γ, образованными им с осями координат Ox, Oy, Oz. Косинусы этих углов (так называемые направляющие косинусы вектора) определяются по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{a}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{a}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Пусть даны вектор ***a***, вектор ***b*** и задано их разложение по ортам, то их сумму и разность можно определить следующим образом:

$a + b = (a_x+b_x)i + (a_y+b_y)j + (a_z+b_z)k;$

$a - b = (a_x-b_x)i + (a_y-b_y)j + (a_z-b_z)k.$

Произведение вектора ***a*** на скалярный множитель ***m*** определяется формулой:

$ma = ma_x i+ma_y j+ma_z k$

Нахождение единичного вектора того же направления, что и данный вектор, называется нормированием вектора.

Вектор $\overline{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец в точке M(x;y;z) называют ***радиусом – вектором*** точки M и обозначают r(M) или r. Так как его координаты совпадают с координатами точки M, то его разложение по ортам имеет вид:

$r = xi+yj+zk.$

Вектор $\overline{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и конец в точке $B(x_2;y_2;z_2)$, может быть записан в виде $\overline{AB} = r_2 - r_1$, где r_2 - радиус-вектор точки B, r_1 - радиус-вектор точки A. Поэтому разложение вектора $\overline{AB}$ по ортам имеет вид:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B и вычисляется следующим образом:

$$|\overline{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Направление вектора $\overline{AB}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d};$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d};$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов ***a*** и ***b*** называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$a \cdot \mathrm{b} = \mathrm{ab}\cos\phi$

Свойства скалярного произведения:

1. $a \cdot a = \mathrm{a}^2$;
2. $a \cdot b = 0$, если a=0, либо b=0, либо $a \perp b$ (ортогональность ненулевых векторов);
3. $a \cdot b = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}$ (переместительный закон);
4. $a \cdot (b + c) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a} \cdot \mathrm{c}$ (распределительный закон);
5. $(ma) \cdot b = \mathrm{a} \cdot (\mathrm{mb}) = \mathrm{m}(\mathrm{a} \cdot \mathrm{b})$ (сочетательный закон).

Скалярные произведения ортов осей координат:

$i^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = 1, \quad i \cdot j = \mathrm{i} \cdot \mathrm{k} = \mathrm{j} \cdot \mathrm{k} = 0$

Пусть векторы ***a*** и ***b*** заданы своими координатами:

$a = \mathrm{x}_1 i + y_1 j + z_1 k$;

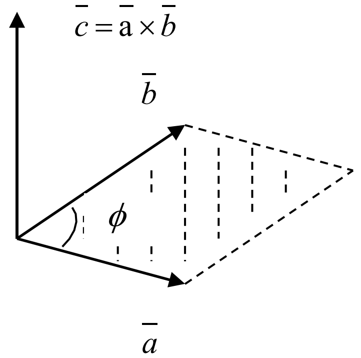
$b = \mathrm{x}_2 i + y_2 j + z_2 k$,

тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле:

$a \cdot b = \mathrm{x}_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Векторное произведение векторов.

Векторным произведением вектора ***a*** на вектор ***b*** (обозначается $a \times b$), называется третий вектор ***c***, определяемый следующим образом:



1) модуль вектора ***c*** равен площади параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b*** ($c = \mathrm{ab} \cdot \sin\phi$, где ϕ - угол между ***a*** и ***b***);

2) вектор ***c*** перпендикулярен векторам ***a*** и ***b***;

3) векторы ***a***, ***b***, ***c*** после приведения к общему началу ориентированы по отношению друг к другу соответственно как орты i, j, k;

Свойства векторного произведения:

1. $b \times a = -\mathrm{a} \times \mathrm{b}$, т.е. векторное произведение не обладает переместительным законом;
2. $a \times b = 0$, если a=0, либо b=0, либо $a \mathrm{II} b$ (коллинеарность ненулевых векторов);
3. $(ma) \times b = \mathrm{a} \times (\mathrm{mb}) = \mathrm{m}(\mathrm{a} \times \mathrm{b})$ (сочетательный закон);
4. $a \times (b + c) = \mathrm{a} \times \mathrm{b} + \mathrm{a} \times \mathrm{c}$ (распределительный закон).

Векторные произведения координатных ортов i, j, k:

$i \times i = \mathrm{j} \times \mathrm{j} = \mathrm{k} \times \mathrm{k} = 0$,

$i \times j = -\mathrm{j} \times \mathrm{i} = \mathrm{k}$,

$j \times k = -\mathrm{k} \times \mathrm{j} = \mathrm{i}$,

$k \times \mathrm{i} = -\mathrm{i} \times \mathrm{k} = \mathrm{j}$.

10. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ. ВИДЫ МАТРИЦ.

Матрица – это прямоугольная таблица чисел или других величин.

Любое число такого массива называется ***элементом*** матрицы.

Ряд чисел, расположенных в матрице горизонтально, называется ***строкой*** матрицы, а вертикально – ***столбцом***. Количество строк в матрице обозначается m, количество столбцов – n. Количество элементов в матрице называется ***размерностью*** матрицы и обозначается $m \times n$.

Виды матриц.

1) Когда в матрице число строк равно числу столбцов, т.е. m=n, то она называется ***квадратной***. Например, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - это общий вид квадратной матрицы размерностью 2×2, где a_{11}, a_{22} – элементы главной диагонали, a_{21}, a_{12} – элементы неглавной (побочной) диагонали.
2) Если все элементы матрицы равны 0, то она называется ***нулевой*** ($A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).
3) Матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов главной диагонали, состоящих из единиц, называется ***единичной*** (обозначается $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).
4) Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом (например, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$).

11. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Рассмотрим следующие действия над квадратными матрицами, размерностью 3×3.

1) ***Суммой двух матриц* A** и **B** называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример.

Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 1+0 & 2+0 \\ 3+4 & (-1)+3 & 4+2 \\ 0+1 & 1+1 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) ***Произведением матрицы A на число m*** называется матрица, определяемая равенством:

$$m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример.

Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ на число *m=2*.

Решение:

$$m \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2\cdot5 \\ 2\cdot4 & 2\cdot2 & 2\cdot3 \\ 2\cdot0 & 2\cdot7 & 2\cdot9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 8 & 4 & 6 \\ 0 & 14 & 18 \end{pmatrix}.$$

3) ***Произведением матриц А и В*** обозначается равенство:

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

, т.е. элемент матрицы – произведения, стоящий в i –ой строке и k – м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i – ой строки матрицы А и k – столбца матрицы В.

$$AB \neq BA.$$

<u>Пример.</u>

Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

Для того, чтобы умножить матрицу А на матрицу В необходимо:

1. элементы первой строки матрицы А перемножить на элементы первого столбца матрицы В и просуммировать их;
2. элементы первой строки матрицы А перемножить на элементы второго столбца матрицы В и просуммировать их;
3. элементы первой строки матрицы А перемножить на элементы третьего столбца матрицы В и просуммировать их.
4. аналогичные действия произвести со второй и третьей строкой матрицы А.

$$A\times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot1+0\cdot4+2\cdot2 & 1\cdot1+0\cdot1+2\cdot0 \\ 0\cdot2+(-1)\cdot1+3\cdot3 & 0\cdot1+(-1)\cdot4+3\cdot2 & 0\cdot1+(-1)\cdot1+3\cdot0 \\ 1\cdot2+4\cdot1+0\cdot3 & 1\cdot1+4\cdot4+0\cdot2 & 1\cdot1+4\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ 6 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

12. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Определитель – это число, получаемое из элементов матрицы по определенному правилу.

Определитель бывает только у квадратной матрицы и имеет порядок, равный порядку (размерностью) квадратной матрицы.

Обозначается: det или Δ.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ определитель записывается: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ и вычисляется как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали, т.е. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5$.

Соответственно, определитель для матрицы размерностью 3×3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ записывается $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Свойства определителя:

1. Определитель не меняется при транспонировании (операция транспонирования заключается в перемене мест столбцов и строк).
2. Если одна из строк или один из столбцов определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. От перестановки двух строк или двух столбцов определитель меняет только знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки или столбца определителя умножить на число $k \neq 0$, то сам определитель умножится на это число.
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.
7. треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов главной диагонали.

13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Правило треугольников (для определителя третьего порядка)

Пусть дан определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Вычисление данного определителя можно разбить на следующие шаги:

1 шаг: находим произведения элементов, лежащих на главной диагонали и прибавим про- изведения элементов, образующих треугольник с основанием параллельным главной диагонали, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$

2 шаг: находим произведения элементов, лежащих на неглавной (побочной) диагонали и вычитаем произведения элементов, образующих треугольник с основанием параллельным этой диагонали, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

3 шаг: из результата, полученного в первом шаге вычитаем результат, полученный во вто- ром шаге.

14. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА.

Матрица B называется ***обратной*** по отношению к матрице A, если произведение AB=BA=E.

Для матрицы, обратной по отношению к матрице A, принято обозначение A^{-1}, т.е. $B=A^{-1}$.

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу. Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}/D_A & A_{21}/D_A & A_{31}/D_A \\ A_{12}/D_A & A_{22}/D_A & A_{32}/D_A \\ A_{13}/D_A & A_{23}/D_A & A_{33}/D_A \end{pmatrix},$$

где A_{mn} – алгебраическое дополнение элемента матрицы в ее определителе, т.е. произведение минора второго порядка, полученного вычеркиванием m – й строки и n – го столбца в определителе матрицы A, на $(-1)^{m+n}$.

Если в прямоугольной матрице A размерности $m\times n$, выделить k произвольных строк и столбцов ($k\le m$, $k\le n$), то определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется ***минором*** k-го порядка матрицы A.

<u>Пример.</u>

Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) найдем определитель матрицы A:

$$D_A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 7+2\cdot 2\cdot 3+0\cdot 0\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 3-2\cdot 0\cdot 7-1\cdot 2\cdot 0=14;$$

2) найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=-14,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1;$$

3) Запишем полученную обратную матрицу, используя формулу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}/D_A & A_{21}/D_A & A_{31}/D_A\\ A_{12}/D_A & A_{22}/D_A & A_{32}/D_A\\ A_{13}/D_A & A_{23}/D_A & A_{33}/D_A\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7/14 & -14/14 & 7/14\\ 6/14 & -2/14 & -2/14\\ 3/14 & 6/14 & -1/14\end{pmatrix}.$$

15. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД КРАМЕРА.

Теорема.

Система *n* уравнений с *n* неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пусть известна система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1;\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

Если ее определитель $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}};\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

Если $D=0$, то система является либо несовместной, либо неопределенной. В последнем случае система сводится к одному уравнению (например, первому), второе же уравнение является следствием первого.

Пример.

Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases}2x+5y=8\\ 3x+y=-1\end{cases}$$

Решение:

1. Составим и вычислим определитель данной системы:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 1-3\cdot 5=-13,$$

2. Вычислим определитель D_x, заменив столбец, состоящий из коэффициентов при x, на столбец, состоящий из свободных членов:

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 = 13,$$

3. Аналогичным образом вычислить определитель D_y:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 8 = -26,$$

4. По формулам Крамера находим x и y:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{13}{-13} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2$$

5. Найденные значения x и y подставим в любое уравнение из системы, и если данное уравнение обратится в тождество, то решение верно.

$$2x + 5y = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 8$$
$$8 = 8$$

16. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ.

Характеристическим уравнением матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ –называются ***характеристическими числами*** матрицы; они всегда действительны, если исходная матрица является симметрической.

<u>Пример.</u>

Найти характеристические числа матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$,
2. Решим данное уравнение

$$(5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$
$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 7$$

таким образом характеристические числа матрицы $\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 7$.

17. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ.

Число А называется ***пределом функции*** f(x) при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого ε>0 найдется δ>0, что $|f(x) - A| < \varepsilon$, при $0 < |x - a| < \delta$.

Записывается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Условно записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$, при $0 < |x - a| < \delta$, где M – произвольное положительное число. В этом случае функция f(x) называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то функция α(x) называется ***бесконечно малой*** при $x\to a$.

Если x<a и $x\to a$, то употребляют запись $x\to a-0$;

Если x>a и $x\to a$ - запись $x\to a+0$.

Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называются соответственно ***левым*** и ***правым пределом функции*** f(x) в точке a.

Для существования предела функции f(x) при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы f(a-0)=f(a+0).

18. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах:

Если существуют $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$);

4) $\lim\limits_{x\to a}k\cdot f(x)=\mathrm{k}\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (k – любое число);

5) если $f(x)\le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

__**Пример 1.**__

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$.

Решение:

Для вычисления данного предела подставим 2 вместо x, в результате получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x+5}{x^2+6}=\frac{2^3-4\cdot 2+5}{2^2+6}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

Некоторые замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

__**Пример 2.**__

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{2x^3+9}$.

Решение:

Для вычисления пределов такого вида, вынесем за скобки неизвестное, содержащее старшую степень:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^3+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{9}{x^3}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Пример.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение:

Для вычисления данного предела используем первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Но в нашем примере необходимо, чтобы аргумент при sinx и значение в знаменателе были одинаковыми. Для этого сделаем следующие преобразование: умножим и разделим нашу дробь на число 5. В результате получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5\cdot x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

ЛИТЕРАТУРА.

1. Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. Сборник задач по математике для техникумов. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»», 2003.
2. Кастрица О.А. Высшая математика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
3. Филимонова Е.В. Математика: учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – Ростов н/Д: Феникс, 2004.
4. Зайцев И.Л. Элементы высшей математике. – М.: Высшая школа, 1975.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1974.

Вопросы для зачета.

1. Понятие множества. Операции над множествами.
2. Числовые множества.
3. Сравнение и отображение множеств.
4. Отношения и множества.
5. Прямая. Общее уравнение прямой.
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой в отрезках.
7. Кривые второго порядка (окружность, гипербола).
8. Кривые второго порядка (эллипс, парабола).
9. Понятие вектора. Скалярное и векторное произведение векторов.
10. Понятие матрицы. Виды матриц (нулевая, квадратная, единичная, матрица - столбец).
11. Действия над матрицами.
12. Понятие определителей второго и третьего порядка. Свойства определителей.
13. Вычисление определителей.
14. Обратная матрица.
15. Системы алгебраических линейных уравнений. Метод Крамера.
16. Характеристическое уравнение.
17. Понятие предела функции.
18. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.

!!!Допуском к зачету является зачтенная контрольная работа.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Ниже приведены задания к контрольной работе. Студент должен выполнять те контрольные задания, номера которых соответствует последней цифре зачетки.

<u>Задания для контрольной работы.</u>

1) Выяснить, что представляют собой множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, если:

1. A={2,3,7,10,12,13}, B={3,4,5,6,7};
2. A={1,-1,2,-2,3,-3}, B={1,2,3};
3. A={3,-3,5,6,8,-8}, B={-3,-4,-5,6,8};
4. A={4,5,6}, B={1,3,-3,5,-5};
5. A={2,6,8,10,-10}, B={4,5,10,11,-12};
6. A={3,4,8}, B={1,2,3,4,9};
7. A={-1,1,8,9}, B={2,3,4,5,6,7};
8. A={1,2,3,4,-4,7}, B={-1,-2,-3,-4,4,-7};
9. A={2,5,9}, B={1,4,5,8};
0. A={2,4,6}, B={1,3,5}.

2) Решить задания:

1. Уравнение прямой задано в виде $(x+2\sqrt{5})/4+(y-2\sqrt{5})/2=0$. Написать уравнение с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.
2. Пусть *A(2,3,-1), B=(4,3,0).* Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.
3. Найти координаты фокусов, длины осей гиперболы, заданной уравнением $16x^2-25y^2=400$.
4. Построить окружность $x^2+y^2-10x-6y-2=0$.
5. Вычислить при каком α векторы $a=(2,-3,\alpha)$ и $b=(-2,4,\alpha)$ перпендикулярны.
6. Вычислить скалярное произведение векторов $a=(1,3,3)$, $b=(2,-1,1)$.
7. Построить гиперболу $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.
8. Написать уравнение параболы с фокусом $F(2,0)$ и директрисой $x+4=0$.
9. Построить эллипс $5x^2+9y^2-30x+18y+9$.
0. Найти координаты фокусов эллипса $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$.

КОНТОЛЬНАЯ РАБОТА №2

1) Найти значение матричного многочлена (E - единичная матрица третьего порядка):

1. $2A^2+B+2E$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

2. $3A-2AB$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $AB+BA+3E$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $A-3AE$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

5. $AB-B^2$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

6. $A^2+2A+4E$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $BA-2EB$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

8. $3A^3-E$, если $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

9. AB^2+2E, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

0. $AE+2AB$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2) Найти обратную матрицу:

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Решить систему уравнений методом Крамера:

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

0. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 8x}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-4x+3}{3x^3+2x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$

0. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

Правила выполнения и оформления контрольной работы:

1) Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку. Необходимо оставлять поля шириной 4-5 см для замечаний преподавателя;
2) На титульном листе тетради должны быть написаны фамилия студента, его инициалы, номер зачетки, название дисциплины, название учебного заведения, адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.
3) В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
4) Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью выписывать ее условие.
5) Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения.